КОНИСБАЕВА КУРАЛАЙ ТАЛГАТОВНА

Краевые задачи с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений

АННОТАЦИЯ

диссертации на соискание степени доктора философии (PhD)
по специальности «8D05401-Математика»

Актуальность исследования. Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения являются основными инструментами для описания широкого спектра процессов в науке и технике. Значительный класс таких уравнений составляют уравнения с малым параметром. Малый параметр — это не просто небольшое число, это ключевой фактор, изменяющий качественные характеристики системы. Наличие малого параметра вызывает возмущение в получаемом уравнении. То есть включение малого параметра в уравнение приводит к значительным изменениям свойств решения и требует специального анализа при стремлении этого параметра к нулю.

Уравнения с малым параметром делятся на *регулярные* и *сингулярные.*

В отличие от регулярно возмущенных задач, в сингулярно возмущенных задачах, когда малый параметр стремится к нулю, возникает уравнение, отличное от исходного, которое характеризуется изменением порядка, нарушением соответствия граничных условий и появлением таких особенностей, как пограничные слои и скачки в структуре решения.Таким образом, основное различие между регулярно и сингулярно возмущенными задачами заключается в том, что при $\varepsilon \to 0$ решение регулярно возмущенной задачи сходится к решению невозмущенной задачи на всей заданной области. Это позволяет применять методы прямой теории возмущений.

В целом, название теории возмущений указывает на то, что даже небольшое возмущение, введенное в уравнение, может существенно повлиять на характер решения. Такие уравнения являются важным инструментом математического моделирования.

Диссертация посвящена исследованию краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений любого порядка, в которых малый параметр стоит не перед одной производной, а перед несколькими производными.

Цель исследования. Изучение краевой задачи для сингулярно возмущённого линейного интегро-дифференциального уравнения высшего порядка.

Объект исследования. Краевые задачи с начальными скачками для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений.

Методы исследования. В диссертационной работе для нахождения решения краевой задачи для сингулярно возмущенной линейного интегро-дифференциального уравнения используется метод пограничных функции.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты вносят существенный вклад в развитие теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. Это уравнение относится к одному из важнейших классов сингулярно возмущенных уравнений. Оно представляет собой математическую модель для изучения различных процессов в физике, химии, биологии, технике и других областях.

Данная исследовательская работа дополняет и развивает ранее существовавшую теорию сингулярного возмущение. Таким образом, эта работа имеет большое значение для дальнейшего развития асимптотических методов анализа комплексных операторных уравнений.

Кроме того, полученные результаты могут быть использованы в учебных программах для подготовки специалистов в области дифференциальных уравнений, прикладной математики, механики и математического моделирования.

Научная новизна. Основные результаты, представленные на защиту. В диссертации были исследованы ранее не изучавшиеся проблемы и получены следующие новые результаты:

- получена аналитическая формула для решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных интегро-дифференциальных уравнений $m+n$-го порядка с малыми параметрами перед m высшими производными;
- получены асимптотические оценки для решения сингулярно возмущенной задачи;
- определен порядок роста решения сингулярно возмущенной задачи и его производных;
- построена модифицированная невозмущенная задача;
- получена оценка разности между решениями сингулярной и модифицированной невозмущенной задач;
- найдены начальные скачки решения и интегрального члена;
- построено асимптотическое разложение решения краевой задачи с любой степенью точностью по малому параметру.

Аппробация. Результаты диссертации были представлены на Международной научной конференции «Мир Фараби»» (Алматы, Казахстан, 6–8 апреля 2021 г.); Международной научной конференции «Мир Фараби» (Алматы, Казахстан, 6–7 апреля 2023 г.); на международной научной конференции «V Борубаевские чтения», посвященной 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики (20–21 июня 2024 г.); «Вычислительные и информационные технологии в науке, инженерии и образовании», посвященная 90-летию Казахского национального университета имени аль-Фараби и 75-летию академика Ш. С. Смагулова (CITech-2024) (23–24 октября 2024 г.); Математический конгресс, Традиционная международная математическая апрельская конференция, посвященная Дню ученых (3–7 апреля 2026 г.);был представлен и обсужден

доклад на научном семинаре кафедры математики факультета механики и математики Казахского национального университета имени аль-Фараби.

Достоверность и обоснованность научных утверждений, выводов и результатов. Результаты, полученные в ходе исследовательской работы, подтверждаются данными ранее признанных ученых, публикациями в индексируемых международных журналах, а также материалами конференций.

Публикации. На основе результатов диссертации опубликовано семь статей:

– Публикации в журналах, включенных в базы данных Web of Science и Scopus:

1. Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotical Convergence of Solutions of Boundary Value Problems for Singularly Perturbed Higher-Order Integro-Differential Equations / Quaestiones Mathematicae Published online: 5 Jul V47, 2024 https://doi.org/10.2989/16073606.2024.2364297 Квартиль:Q2 Процентиль: 54, Индекс цит.: 1.4, SJR: 0.44

2. Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotic expansion of the solution of a boundary value problem for singularly perturbed integro-differential equations of higher orders\ Boundary Value Problem Journal \ 2025 (WoS (SCIE) Q2) https://doi.org/10.1186/s13661-025-02140-5 Квартиль: Q1, Процентиль: 75, Индекс цит.: 2, SJR: 0.479

3. Mirzakulova A.E., Dauylbayev M.K., Konisbayeva K.T. Asymptotic estimations of the solution of a singularly perturbed equation with piecewise constant argument Lobachevskii Journal of Mathematics/45(4), 2024г. DOI:10.1134/S1995080224601450 Квартиль: Q2, Процентиль: 57, Индекс цит.: 1.5, SJR: 0.435

4. Mirzakulova A.E., Konisbayeva K.T. Uniform asymptotic expansion of the solution for the initial value problem with a piecewise constant argument / Bulletin of the Karaganda, «Mathematics Series».- 116(4), 2024 г. https://doi.org/10.31489/2024m4/138-148 Квартиль: Q2, Процентиль: 53, Индекс цит.: 1.4, SJR: 0.392.

5. Atakhan N., Nurpeissov K.S., Konisbayeva K.T. Asymptotic estimations of the solution for a singularly perturbed equation with unbounded boundary conditions \ Bulletin of the Karaganda, «Mathematics Series».- №4(108)/2022 https://doi.org/10.31489/2022m4/20-33 Квартиль: Q2, Процентиль: 53, Индекс цит.: 1.4, SJR: 0.392

6. M.K. Dauylbayev, K.T. Konisbayeva, N.R. Tortbay Integral BVP for singularly perturbed system of differential equations // International Journal of Mathematics and Physics 12, No1, 25 (2021). С. 25-33. DOI:https://doi.org/10.26577/ijmph.2021. v12.i1.04 Квартиль:Q4, Процентиль: 7, Индекс цит.: 0.157, SJR: 0.4

7. K.T. Konisbayeva, M.K. Dauylbayev, Mirzakulova A.E., Asymptotic estimates of the solution of the BVP for singularly perturbed integro-differential equations// Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. №1(129)-

2026. – P. 39-51. https://doi.org/10.26577/JMMCS129120264 Квартиль:Q4, Процентиль: 18, Индекс цит.: 0.157, SJR: 0.4.

– *Публикации в сборниках материалов международных научных конференций:*

1. Интегральная краевая задача для системы дифференциальных уравнений с сингулярными возмущениями // Международная научная конференция «Фараби әлемі», Алматы, 7–8 апреля 2021 г.: сборник материалов (Алматы – 2021. –19 с.).
2. Краевая задача для сингулярно возмущенного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром в высших производных // «Фараби әлемі» Международная научная конференция, Алматы, 4–6 апреля 2024 г.: Материалы (Алматы – 2024. – 21 с.).
3. Асимптотическая оценка решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Международная научная конференция, посвященная 70-летию Национальной академии наук Кыргызской Республики и 40-летию Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики, «V Борубаевские чтения» Бишкек, Кыргызстан, 20–21 июня 2024 г.: Материалы. (Бишкек, 2024. 59 с.)
4. Асимптотическое разложение сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Посвящается 90-летию КазНУ им. аль-Фараби и 75-летию академика Ш. С. Смагулова «Вычислительные и информационные технологии в науке, инженерии и образовании» (CITech-2024), Алматы, Казахстан, 23–24 октября 2024 г.: Материалы конференции. (Алматы-2024. 89 с.)
5. Асимптотическая оценка решения краевой задачи для сингулярно возмущённого интегро-дифференциального уравнения // Математический конгресс-2026. Традиционная международная апрельская математическая конференция, посвященная Дню ученых, Шымкент, Казахстан, 3–7 апреля 2026 г.: сборник тезисов докладов.

По итогам диссертационного исследования опубликовано 5 работ, в том числе одна статья входящая в первый (Q1) квартиль в журнале «Boundary Value Problem» (75-й процентиль в базе данных Scopus), 4 статьи в журналах входящие во второй (Q2) квартиль: «Quaestiones Mathematicae» (54-й процентиль в Scopus), «Lobachevskii Journal of Mathematics» (57-й процентиль в Scopus) и «Bulletin of the Karaganda», «Mathematics Series» (53-й процентиль в базе данных Scopus) и 2 статьи в журналах, входящих в четвертый (Q4) квартиль: International Journal of Mathematics and Physics (7-й процентиль в базе данных Scopus) и Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science (18-й процентиль в базе данных Scopus); – 5 публикаций в материалах международных конференций.

Структура диссертации. Диссертация состоит из нормативных ссылок, введения, двух основных разделов (каждый из которых включает подразделы), заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 85 страниц.

Содержание диссертации. Во введении диссертации обосновывается актуальность выбранной темы, указывается ее научная новизна, описываются использованные методы исследования, обозначается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, а также дается краткий обзор структуры работы.

В первом разделе мы рассматриваем двухточечную краевую задачу следующего вида для сингулярно возмущенного линейного интегро-дифференциального уравнения $n+m$-го порядка с малыми параметрами перед m старшими производными, при условии, что корни дополнительного характеристического уравнения отрицательны:

$$L_\varepsilon y = \sum_{r=1}^{m} \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{r+n} y}{dt^{r+n}} + \sum_{k=0}^{n} A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = F(t) + \int_0^1 \sum_{j=0}^{n_1+p} H_j(t,x) y^{(j)}(x,\varepsilon) dx \quad (1)$$

$$\begin{cases} \left. \dfrac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = \overline{0, l-1} \\ \left. \dfrac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=1} = \beta_i, \quad i = \overline{0, q-1} \end{cases} \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, α_i, β_i – известные постоянные, $A_n(t) \neq 0$, $A_{n+m}(t) = 1$, $m+n = l+q$, $p = \overline{1, m}$.

Согласно уравнению (1), строится фундаментальная система решений, функция Коши и граничные функции однородного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения, и получен их асимптотические оценки. Используя известные функции Коши и граничные функции, выводится и доказывается теорема для аналитической формулы решения краевой задачи (1), (2). Используя аналитическую формулу, доказывается теорема об асимптотической оценке решения. Строится модифицированная невозмущенная краевая задача, состоящая из начальных скачков решения и интегрального члена. В результате выводится и доказывается теорема о предельном переходе. Для подтверждения теоретического результата приводится численный пример, полученный с помощью моделирования.

В втором разделе представлен алгоритм асимптотических разложений с точностью малого параметра для решения краевой задачи (1), (2), а полученный результат сформулирован и доказан в виде теоремы.

В заключительном разделе проводится анализ общих результатов.